ත්‍රිකෝණමිතිය

(1) i) $-2\pi \le y \le 2\pi$ පරාසය තුළ $y = \cos^{-1} x$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. $\cos y = \frac{1}{2}$ සමීකරණය විසඳා ඉහත පරාසය තුළ වූ විසඳුම් ප්‍රස්තාරයේ පැහැදිලිව ලකුණු කරන්න.

ii) $-4\pi \le y \le 4\pi$ පරාසය තුළ $y = \tan^{-1} x$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
$\tan 2y = 1$ සමීකරණය විසඳා $-2\pi \le y \le 2\pi$ පරාසය තුළ වූ විසඳුම් සටහනෙහි පැහැදිලිව ලකුණු කරන්න. (1975)

(2) i) θ හි අගය කුමක් වුවත්, $\cos\phi = -\frac{1}{2}$ වන විට, $\cos\theta - \cos(\theta - \phi) + \cos(\theta - 2\phi)$ හි අගය ශුන්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

ii) $\cot\theta - (7 + 4\sqrt{3})\cot(\theta + \alpha) = 0$ නම් $\sqrt{3}\sin(2\theta + \alpha) = 2\sin\alpha$ බව පෙන්වන්න. θ සඳහා විසඳුමක් තිබීම පිණිස සයින් α හි අගය පරාසය සඳහන් කරන්න. ඒනයින්, $\cot\theta - (7 + 4\sqrt{3})$ කොට් $\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන θ හි අගයන් සොයන්න. (1975)

(3) i) $\sec\theta + \tan\theta = u$ නම් $\sin\theta$ වලට ගත හැක්කේ එක් අගයක් පමණක් බව පෙන්වන්න. එම අගය සොයන්න.

ii) $\cos x + \cos y + \cos z = \frac{3}{2}$ හා $\tan x = \tan y = \tan z$ නම් 0 හා 2π අතර x, y, z සඳහා අගයන් කුලක් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා පොදු විසඳුම සොයන්න. (1976)

(4) $c^2 \le a^2 + b^2$ වන විට $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ සමීකරණය විසඳන්න. θ_1 හා θ_2 යනු 0 හා 2π අතර විසඳුම් දෙකක් වේ නම් $\tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$ හා $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ සොයන්න. (1976)

(5) ABC ත්‍රිකෝණයේ A, B, C හි සිට සම්මුඛ පාදවලට ඇඳි ලම්බයන්ගේ දිග පිළිවෙලින් ρ_1, ρ_2, ρ_3 වන අතර r හා R යනු පිළිවෙලින් අන්තර්වෘත්තයේ හා පරිවෘත්තයේ අරයයන් වේ නම්,

i) $\rho_1 \sin A = \rho_2 B = \rho_3 \sin C$

ii) $\frac{2}{r} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}$

iii) $R = \frac{1}{4}\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\rho_1 \cos A + \rho_2 \cos B + \rho_3 \cos C}$ බව පෙන්වන්න . (1976)

(6) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ද $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ද විට $\sqrt{6}\cos(x - \alpha) - \tan x = \sqrt{2}$ සමීකරණ සපුරාලන රේඩියන් 0 හා 2π අතර x හි අගයන් සොයන්න. රේඩියන් 0 සිට 2π තෙක් x හි අගය සඳහා $\sqrt{6}\cos(x - \alpha)$ යන්නෙහි ද $\sqrt{2} + \tan x$ යන්නෙහි ද ප්‍රස්තාරයන්ගේ දළ රූප සටහන් එකම රූප සටහනේ අඳින්න. ඒ නයින්, රේඩියන් 0 සිට 2π වසම තුළ, $\tan x - \sqrt{6}\cos(x - \alpha) + \sqrt{2} \ge 0$ වන ප්‍රාන්තර සොයන්න. (1978)

(7) i) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$ බව ඔප්පු කරන්න.

ii) $\sin\theta+\sin 3\theta=\sin 2\theta$ ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම ලබාගන්න.

iii) $\alpha=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$ නම්, $3\sin 2\theta+2\sin^2\theta=2$ ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණයේ ඇතැම් විසඳුම් α කෙරෙහි පරායත්ත නමුත් ඇතැම් විසඳුම් α කෙරෙහි ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. (1979)

(8) පහත සඳහන් ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

i) $\cos x+\cos 7x=\cos 4x$ ii) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$

iii) $6\tan 2\theta-3\tan\theta-5\cot\theta=0$ (1979 අතුරු)

(9) i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{3}$ නම්, $x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}$ බව සාධනය කරන්න.

ii) $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}2$ සමීකරණය විසඳන්න. ප්‍රතිලෝම වෘංජන ශ්‍රිතවලට ප්‍රධාන අගය පමණක් දෙනු ලැබෙයි නම් ඇත්තේ එක් විසඳුමක් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න.

iii) $f(x)\equiv\cos^2x-2\sin x\cos x-\sin^2x,\ 0\le x<2\pi$ නම්, a යනු නියතයක් ද θ යනු නියත සුළු කෝණයක් ද වන a කොස් $(2x+\theta)$ ආකාරයෙන් $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින්,

i) $f(x)=0$ ද ii) $f(x)=1$ ද වන x හි අගයයන් සොයන්න. (1979 අතුරු)

(10) i) $\sec\theta-\tan\theta=2-\sqrt{3}$ නම් $\sin\theta$ හිත් $\cos\theta$ හිත් අගය සොයන්න. ඒ නයින්, සමීකරණය සපුරාලන 0ත් 2π අතර වූ θ හි අගය සොයන්න.

ii) පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ දෙකෙහි සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

අ) $\cot\theta=\frac{\sin 2\theta}{1-3\cos 2\theta}$

ආ) $\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\cos\theta$ (1980)

(11) i) α,β යනු $\alpha=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ද $\beta=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ද $\alpha-\beta=\sin^{-1}\frac{x(1+x)}{1+x^2}$ ද වන ද පරිදි වූ සුළු කෝණ දෙකක් නම්, x ට තිබිය හැකි අගය සොයන්න.

ii) $p=a\cot\theta$ ද $q=a\cot\theta\cot 2\theta$ ද නම් $p^2=a(2q+a)$ බව පෙන්වන්න.

iii) වර්ගඵලය වර්ග ඒකක A වූ වෘත්තයෙක පාදයක් තුළ අන්තර්ගත කළ වෘත්තයක වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $(3-2\sqrt{2})A$ බව පෙන්වන්න. (1980)

(12) $f(x)=5\cos^2x-24\sin x\cos x-5\sin^2x$ ප්‍රකාශනය $a\cos(2x+p)+b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a, p, b එක එකක් x කෙරෙන් ස්වායත්තය. ඒ නයින්, x හි සියළුම තාත්ත්වික අගය සඳහා $|f(x)|\le 13$ බව පෙන්වන්න. $0\le x\le 180^\circ$ පරාසය තුළ $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න. තවද $0\le x\le 180^\circ$ පරාසය තුළ දී $f(x)=0$ සමීකරණයට

i) විසඳුමක් නොතිබෙන්නේ, ii) එක විසඳුමක් තිබෙන්නේ,

iii) විසඳුම් දෙකක් තිබෙන්නේ, iv) විසඳුම් තුනක් තිබෙන්නේ

කවර අගය ගන්නා විට දැයි සොයන්න. (1977)

(13) i) $\tan(A-2B) = \cot(2A-B)$ ද, $\tan(A+2B) = \cot(2A+B)$ ද, නම් Aත් B ත් දෙකම රේඩියන් $\frac{\pi}{6}$ හි ගුණාකාර බව ද A ඔත්තේ ගුණාකාරයක් නම්, B ඉරට්ටේ ගුණාකාරයක් බව ද පෙන්වන්න.

ii) u, v යනු $12\cos x + 5\sin x = 1$ සමීකරණයෙහි විසඳුම් දෙකකි. u ත් v ත් අතර රේඩියන් 2π හි ගුණාකාරයකින් වෙනස් නොවෙයි නම්, $\cos u + \cos v = \frac{24}{169}$ බව පෙන්වන්න. (1977)

(14) i) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වූ සාමාන්‍ය අංකනය අනුව $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos$ කොස් A බව පෙන්වන්න. ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{s^2}{abc}$ බව පෙන්වන්න.

ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් කේන්ද්‍රයත් පරිකේන්ද්‍රයත් BC පාදයේ සිට එකම දුරින් වෙයි. $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos A$ බව පෙන්වන්න.
$\cos B + \cos C = 1$ බව අපෝහනය කරන්න. (1978)

(15) i) $2\cos x = \sqrt{3}\cot x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම රේඩියන් වලින් සොයන්න.

ii) α යනු සුළු කෝණයක් වන a කොස් $(x + \alpha)$ ආකාරයෙන් $4\cos x - 3\sin x$ ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් හෝ අන් අයුරෙකින් හෝ,

අ) රේඩියන් 0 ත් 2πත් අතර වූ සියලු විසඳුම් දෙමින් $4\cos x - 3\sin x = 3$ සමීකරණය විසඳන්න.

ආ) $\frac{1}{4\sin x - 3\cos x + 6}$ යන්නෙහි විශාලතම අගයත් අඩුතම අගයත් සොයන්න.

(1978)

(16) i) a, b, c තාත්ත්වික විට $c^2 \leq a^2 + b^2$ නම්, $a\sin x + b\cos x = c$ සමීකරණයට තාත්වික විසඳුම් තිබෙන බව සාධනය කරන්න. පහත සඳහන් සමීකරණ වලින් එක එකෙහි සාධාරණ විසඳුම් ලබාගන්න.

අ) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ ආ) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$

ii) $\cos 7x - \sqrt{3}\cos 3x + \cos x = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

iii) $\theta_1 = \tan^{-1}\frac{1}{3}$, $\theta_2 = \tan^{-1}\frac{1}{4}$, $\theta_3 = \tan^{-1}\frac{2}{9}$ නම්, $0 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \frac{8\pi}{4}$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න. (1981)

(17) සාමාන්‍ය අංකනය අනුව ABC ත්‍රිකෝණයක $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ බව සාධනය කරන්න. පිළිවෙලින් PQ කේන්ද්‍රත් p, q ($\neq$ p) අරත් ඇති ඒක තල වෘත්ත දෙකක් X හී දිත් Y හී දිත් ඡේදනය වෙයි. PXQ කෝණය = α ද වෘත්තවලට ඇඳි පොදු ස්පර්ශක එකක් අනෙක සමඟ θකෝණයක් සාදයි ද නම්, $(p-q)^2$ කොට් $\frac{\theta}{2} = 4pq$ $\sin\frac{\alpha}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වන විට දී කොස් θ හි අගය p ත් q ත් ඇසුරෙන් සොයන්න. (1981)

(18) i) $\tan 3\theta = 1$ නම්, $\tan \theta$ යන්න $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න. මේ සමීකරණය විසඳා මූල තුනට අනුරූප θ හි අගයයන් සොයන්න.

ii) $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$, $\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$ ද නම් $\tan \frac{1}{2}(x+y) = \frac{3}{4}$ බව පෙන්වන්න. මේ සමීකරණ සපුරාලන සේ x වත් y වත් තිබිය හැකි සියලුම අගයයන් සොයන්න. (1982)

(19) ABC යනු සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයකි. A, B, C ශීර්ෂවලට සම්මුඛ පාද පිළිවෙලින් D, E, F ලක්ෂ්‍යවල දී හමු වන සේ A, B, C ශීර්ෂවල සිට ලම්බ අඳිනු ලැබේ.

i) r යනු ABC ත්‍රිකෝණයෙහි අන්තර් වෘත්තයේ අරය විට $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{r}$ බව ද

ii) R යනු ABC ත්‍රිකෝණයෙහි පරිවෘත්තයේ අරය විට $\frac{\cos A}{AD} + \frac{\cos B}{BE} + \frac{\cos C}{CF} = \frac{1}{R}$ බවද

iii) DEF ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$ බව ද පෙන්වන්න. (1982)

(20) i) $6\tan 2\theta - 3\tan\theta - 5\cot\theta = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

ii) $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ හා $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $t = \tan x$ වේ. $\sin\theta + \sin\phi = a$ හා $\cos\theta + \cos\phi = b$ නම් $\cos(\theta+\varphi)$ හා $\cos(\theta-\varphi)$ හි අගයන් හා a හා b ඇසුරෙන් සොයන්න. $\tan\theta + \tan\varphi = \frac{8ab}{(a^2+b^2)^2 - 4a^2}$ බව පෙන්වන්න. (1983)

(21) ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න.

i) $a = (b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$

ii) $\cot\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{b-c}\tan\frac{A}{2}$ අපෝහනය කරන්න.

i) හා ii) උපයෝගී කරගෙන $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ලබාගන්න. (1983)

(22) i) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ බව සාධනය කරන්න. $\theta = 18^0$ නම් $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ බව ද $\sin 18^0$ යනු $4x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් බව ද සාධනය කරන්න. ඒනයින් $\sin 18^0$ සහ $\cos 18^0$ හි අගයයන් සොයන්න.

ii) $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ සහ $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $t = \tan\frac{\theta}{2}$ වේ. ඉහත ආදේශන මගින් $|c| < \sqrt{a^2+b^2}$ වන $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ සමීකරණය විසඳන්නේ කෙසේ දැයි පෙන්වන්න. $\theta = \alpha$ සහ $\theta = \beta$ මෙම සමීකරණයේ විසඳුම් දෙකක් නම් $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{c+a}$ බව පෙන්වා $\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{c}{a}$ බව අපෝහනය කරන්න. (1984)

(23) ත්‍රිකෝණයකි.

i) සුළු කෝණී ii) සෘජු කෝණී iii) මහා කෝණී යන ප්‍රභින්න අවස්ථා තුන සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා,

i) $b\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)=(c+a)\sin\frac{B}{2}$,

ii) $\dfrac{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}=\dfrac{2b}{(c+a-b)}$

iii) a, b සහ c සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම්, $\cot A/2, \cot B/2$ සහ $\cot C/2$ ද සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1984)

(24) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ නම්, එවිට $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ බව පෙන්වන්න. x, y සහ z සුදුසු පරිදි තෝරා ගනිමින් $A+B+C=\pi$ නම්, එවිට $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$ බව අපෝහනය කරන්න. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ යනු $A_1A_2=A_2A_3=2a$, $A_3A_4=A_4A_5=2b$ සහ $A_5A_6=A_6A_1=2c$ වන සේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටි ෂඩස්‍රයකි. මෙම වෘත්තයේ අරය λ, $\lambda^4-(a^2+b^2+c^2)\lambda^2-2ab\lambda=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. (1985)

(25) x හි සියලු තාත්වික අගයයන් සඳහා $a\cos^2x+2b\sin x\cos x+c\sin^2x$ ප්‍රකාශනය $\frac{a+c}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2+4b^2}$ සහ $\frac{a+c}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$ අතර පිහිටන බව සාධනය කරන්න.
$f(x)\equiv 9\cos^2x+24\sin x\cos x+16\sin^2x-k=0$ ට තාත්වික විසඳුම් තිබීම සඳහා k ට තිබිය යුතු අගය පරාසය සොයන්න. $9\cos^2x+24\sin x\cos x+16\sin^2x$ හි වැඩිතම සහ අඩුතම අගයන් ද සොයන්න. $9\cos^2x+24\sin x\cos x+16\sin^2x-\frac{25}{4}=0$ සමීකරණය විසඳන්න. (1985)

(26) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ බව පෙන්වන්න.

i) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

ii) $a^2+c^2=2b^2$ නම්, එවිට $\cot A+\cot C=2\cot B$ බව පෙන්වන්න. (1986)

(27) i) $\sin x+\cos y=1$ $\cos 2x-\cos 2y=1$ සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

ii) $\cot^{-1}\frac{xy+1}{x-y}+\cot^{-1}\frac{yz+1}{y-z}+\cot^{-1}\frac{zx+1}{z-x}=n\pi$ බව පෙන්වන්න. මෙහි n නිඛිලයකි.

(1986)

(28) i) $(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2$ ප්‍රසාරණය කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\cos^6\theta+\sin^6\theta$ යන්න $\cos 4\theta$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර ඒනයින්, $\cos^6\theta+\sin^6\theta=\frac{1}{2}\sin 4\theta+\frac{5}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

ii) $\tan 2\theta+\tan 2\phi=0$ නම්, $\theta+\phi$ යන්න $\frac{\pi}{2}$ නිඛිල ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න. θ^0 සහ 180^0 අතර විධිමත් ලෙස පවතින සහ $\tan\theta+\tan\phi+3=0, \tan 2\theta+\tan 2\phi=0$ සමීකරණ පද්ධතිය සපුරාලන θ සහ ϕ කෝණ යුගල සියල්ලම සොයන්න.

iii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{x}{2}+\tan^{-1}\frac{x}{3}=\frac{\pi}{2}$ සමීකරණය විසඳන්න. (1987)

(29) ABC ත්‍රිකෝණයන් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක A කේණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකය D හි දී BC ට හමු වේ.
$AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ බව සාධනය කරන්න. $c>b$ නම් සහ A කෝණයේ බාහිර කෝණ සමච්ඡේදකය E හි දී BC ට හමුවේ නම්. AE සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න. DAE කෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකය X හි දී DE ට හමුවේ නම්, $AX=\frac{\sqrt{2}bc\sin A}{c\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)+b\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)}$ බව පෙන්වන්න. $b=c$ නම්, AE හා AX ගැන ඔබට කවරක් කිව හැකි ද? (1987)

(30) i) $a^2+b^2>c^2$ නම් $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ සමීකරණය සපුරාලන ලබන 0හා 2π අතරේ α සහ β නම් ප්‍රභින්න අගයන් දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න.
$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)$ බව සාධනය කරන්න.

ii) $x=\sin\alpha$ යනු $4x^3-3x+\sin 3\alpha=0$ සමීකරණයේ මූලයක් බව පෙන්වන්න. කෝණයන්ගේ සයින ලෙස ප්‍රකාශ කරමින් අනෙක් මූල ලබා ගන්න. ඉහත ඝනජ සමීකරණයේ මූලවන පරස්පර මූල වන සමීකරණය ලියා $\alpha=10^0$ ලෙස ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ
$\operatorname{cosec}10^\theta+\operatorname{cosec}130^\theta+\operatorname{cosec}250^\theta=6$ බව පෙන්වන්න.
($ax^3+bx^2+cx+d=0$ සමීකරණයේ මූල වන ඓක්‍යය $\frac{-b}{a}$ යයි උපකල්පනය කළ හැක.) (1988)

(31) Δ යනු ABC ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය යයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$ බව සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක A,B,C කෝණවල අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදක ඉදිරිපිට පාද පිළිවෙලින් D,E,F හි දී කපනු ලබන අතර O යනු ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්තර කේන්ද්‍රය වේ. $AO=\frac{2\Delta}{a+b+c}\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න. තව ද DEF ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{2abc\Delta}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ බව පෙන්වන්න.

(1988)

(32) i) $\tan(\theta+\alpha)-(3+2\sqrt{2})\tan\theta=0$ නම් θ සඳහා තාත්වික විසඳුම් තිබීමට $\sin\alpha$ හි පරාසය ප්‍රකාශ කරමින් $\sin(2\theta+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.
එනයින්, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-(3+2\sqrt{2})\tan\theta=0$ සමීකරණයට සපුරාලනු ලබන θ හි අගයන් සොයන්න.

ii) A,B,C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම් θ හි ඕනෑම අගයක් සඳහා
$\tan A+\tan(B+\theta)+\tan(C-\theta)=\tan A\tan(B+\theta)\tan(C-\theta)$
බව සාධනය කරන්න.

iii) $\tan(\cos^{-1}x)=\sin\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ සමීකරණය විසඳන්න. (1989)

(33) සුපුරුදු අංකනයෙන් $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව අපෝහනය කරන්න. $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ නම්,

ඇ) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin C} = \frac{2}{\sin B}$

ආ) $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{2}{\sin^2\frac{B}{2}}$ බව පෙන්වන්න. (1989)

(34) i) $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) $\cos^{-1}x - \sin^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

iii) $\sin x\cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0$ සමීකරණ විසඳන්න. (1990)

(35) ABC ත්‍රිකෝණයෙහි පාදවල දිග a, b, c ද අර්ධ පරිමිතිය s ද උච්ච h_1, h_2, h_3 ද අන්තර් වෘත්තයේ අරය p ද වේ. මෙවා සාධනය කරන්න.

i) $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{p}$

ii) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

මෙහි සුපුරුදු අංකනය සහිතව A,B,C කෝණවල අනුපාතය 1: 2: 4 වේ.

iii) $2(PA+PB+PC)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{48s(s-a)(s-b)(s-c)}$ මෙහි p ලක්ෂ්‍යය වූ කලී ත්‍රිකෝණයේ පාද p ලක්ෂ්‍යයේ දී සමාන කෝණ ආපතන කරන පරිදි ත්‍රිකෝණය ඇතුළත ලක්ෂ්‍යයකි. (1990)

(36) i) $5\cos\theta + 12\sin\theta = \frac{13}{2}$

ii) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

iii) $\tan^{-1}\left(\frac{y-1}{y-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y+1}{y+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න. (1991)

(37) i) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ බව සාධනය කරන්න. a − b = kc නම්, $\sin\frac{A-B}{2} = k\cos\frac{C}{2}$ සහ $\frac{k\sin B}{1-k\cos B} = \tan\frac{A-B}{2}$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\cos\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ සම්බන්ධයෙන් $\theta(>0)$ කෝණය දෙනු ලැබේ. මෙහි a, b, c රාශි ABC ත්‍රිකෝණයක් සම්බන්ධයෙන් භාවිත කරන සාමාන්‍ය අර්ථ ගනී. $a = (b+c)\sin\theta$ බව සාධනය කරන්න. (1991)

(38) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයකින් $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ බව සාධනය කරන්න. D යනු BD : DC = m : n වන පරිදි ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

$B\hat{A}D = \alpha, C\hat{A}D = \beta$ සහ $C\hat{D}A = \theta$ නම්, $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta = n\cot B - m\,not\,C$ බව සාධනය කරන්න. F යනු AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද L යනු A ශීර්ෂයේ සිට BC පාදයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය ද වේ. P හි දී CF සහ AL ඡේදනය වේ. $\tan A\hat{P}F = \frac{2-\cot B(\cot A-\cot B)}{\cot A+\cot B}$ බව සාධනය කරන්න. (1992)

(39) අ) $\cos(A+B)$ සඳහා සම්මත සූත්‍රය යොදා $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ බව පෙන්වන්න. $\cos 2\theta \tan\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.
$2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ සර්වසාම්‍ය සාධනය කර ඒනයින්, $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} \equiv \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ අපෝහනය කර $\cos\frac{3\pi}{5}$ සඳහා අගයක් ලබාගන්න.

ආ) $\tan(A-B) \equiv \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කරන්න. x සඳහා පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

i) $\tan x - \tan(x-\alpha) = \tan\alpha, \alpha \neq 0$

ii) $\tan^{-1} X + \tan^{-1}(2X) = \pi/4$ (1992)

(40) a) A, B, C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්,
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ බව සාධනය කරන්න.

b) $2A + B = \frac{\pi}{4}$ නම්, $\tan B = \frac{1-2\tan A - \tan^2 A}{1+2\tan A - \tan^2 A}$ බව පෙන්වන්න. $\tan\frac{\pi}{8}$ යන්න $x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් බව ද එහි අගය $\sqrt{2}-1$ බව ද අපෝහනය කරන්න. අනෙක් මූලය $\tan\theta$ නම්, $(0, \pi)$ පරාසයෙහි පිහිටි θ සොයන්න. (1993)

(41) i) $\sqrt{3}(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$ ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
සමීකරණය විසඳන්න.

ii) $2\sin y \sin(x+y) = \cos x \cot x + \sin 2y = \sin 2x$ සමීකරණ x සහ y සපුරාලයි. ඉහත පළමුවැනි සමීකරණය $\sin x \sin 2y = \cos x \cos 2y$ යන ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වා හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ y හි සමීකරණයක් ලබාගන්න. ඒ නයින්, $0 \leq x \leq \pi$ සහ $0 \leq y \leq \pi$ විට x ද y ද සඳහා ඉහත සමගාමී සමීකරණය විසඳන්න. (1993)

(42) අ) සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක Δ වර්ගඵලය, $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$ යනනෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න. තව ද, $\frac{\Delta}{\tan\frac{A}{2}} + \Delta\tan\frac{A}{2} = bc$ බවත් $\frac{\Delta}{s\tan\frac{A}{2}} + s = b + c$ බවත් සාධනය කරන්න. මෙහි $2s = a + b + c$ වේ.

ආ) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $\tan A\hat{O}H = \frac{|\sin 2B - \sin 2C|}{1+\cos 2B + \cos 2C}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි O සහ H යනු පිළිවෙලින් ත්‍රිකෝණයේ පරිකේන්ද්‍රය සහ ලම්බ කේන්ද්‍රය වේ. (1994)

(43) අ) විසඳන්න.

i) $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$

ii) $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{2\pi}{3}, x > 1$

ආ) $\sin\frac{x+y}{2} = u$ සහ $\cos\frac{x-y}{2} = v$ නම්, $\sin x + \sin y = \sqrt{2}$ $\cos x.\cos y = \frac{1}{2}$ යන සමගාමී සමීකරණ $uv = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v^2 - u^2 = \frac{1}{2}$ ලෙස ඌනනය වන බව පෙන්වන්න. ඒනයින් දී ඇති සමගාමී සමීකරණ x සහ y සඳහා විසඳන්න. (1994)

(44) i) සුපුරුදු අංකනයකින් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ බව සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක කුඩාම කෝණය A ද විශාලතම කෝණය C ද වන අතර $C = \frac{\pi}{2} + A$ පොදු අන්තරය d වන සමාන්තර ශ්‍රේණියක a,b,c පාද පිහිටයි. $\sin A = \frac{a}{(2a^2+4ad+4a^2)^{1/2}}$ බව පෙන්වා $\cos A$ සහ $\cos 2A$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශන ලබාගන්න. $\frac{a}{d} = \sqrt{7} - 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) ABC ත්‍රිකෝණයකි. O සහ H පිළිවෙලින් එහි පරිකේන්ද්‍රය සහ ලම්බ කේන්ද්‍රය වේ. OH රේඛාව BC ට $\tan^{-1}\left(\frac{3-\tan B\tan C}{\tan B - \tan C}\right)$ කෝණයකින් ආනත බව පෙන්වන්න. (1995)

(45) x සඳහා විසඳන්න.

i) $3\cos x - 4\sin x = 5\sin kx$; මෙහි k නියතයකි.

ii) $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$

iii) $\cos^{-1}x - \sin^{-1}x = \frac{\pi}{6}$; මෙහි $0 < \cos^{-1}x < \pi$ සහ $\frac{-\pi}{2} \le \sin^{-1}x \le \frac{\pi}{2}$ වේ.

(1995)

(46) i) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය ප්‍රකාශ කරන්න. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{\sin(B-C)}{\sin A} = \frac{b^2-c^2}{a^2}$ බව පෙන්වන්න.

ii) ABC ත්‍රිකෝණයක කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය I ද පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදකයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O වේ. A යනු සුළු කෝණයක් නම් BC ට IO හි ආනතිය $\tan^{-1}\left|\frac{\cos B+\cos C-1}{\sin B-\sin C}\right|$ බව පෙන්වන්න. (1996)

(47) i) 1 සහ 2 අතර $\frac{\cos x-2\sin x+1}{\cos x-\sin x}$ පැවතිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

ii) $A + B + C = \pi$ නම්, $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$ බව පෙන්වන්න.

iii) $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$ විසඳන්න.

iv) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ බව සාධනය කරන්න. (1996)

(48) a, h සහ b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා විට $f(x) \equiv a\cos^2 x + 2h\sin x\cos x + b\sin^2 x$ යන්න $\cos 2x \sin 2x$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. f (x) සඳහා $A + B\sin(2x+\alpha)$ ආකාරයේ ප්‍රකාශනයක් අපෝහනය කරන්න. මෙහි A,B සහ $\alpha(0 \le \alpha < 2\pi)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. එනයින්, f (x) හි උපරිම හා අවම අගයයන් ද එම අගයයන් ගෙන දෙන $2\pi - \alpha \le x \le 2\pi + \alpha$ හි පිහිටි අනුරූප අගයයන් ද ලබාගන්න. a = 3, b = 1 සහ $h = \sqrt{3}$ විට $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා f (x) හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න. (1997)

(49) අ) i) $\cos x+\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)=0$ සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම ලබාගන්න. මෙහි $0<\alpha,\beta\le\frac{\pi}{2}$ වේ.

ii) $x>-\sqrt{3}$ සඳහා $\tan^{-1}x-\tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නියමය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ වනනේ C කෝණය $=\frac{\pi}{3}$ නම් හා එනම් ම පමණක් වුවහොත් බව පෙන්වන්න. (1997)

(50) $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)\sin 2x+2\cos 2x$ ලෙස ගනිමු. $f(x)=\frac{5}{2}\sin(2x+\alpha)$ වන පරිදි $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$ පරාසය තුළ α අගයක් පවතින බව පෙන්වන්න.

i) $f(x)=0$ වීමට ii) $f(x)$ ට උපරිමයක් පැවතීමට iii) $f(x)$ ට අවමයක් පැවතීමට

x ගතයුතු අගයයන් සොයන්න.

f හි සහ $g(x)=f(x-\alpha)$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන g හි ප්‍රස්ථාර එකම රූප සටහනේ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ සඳහා කටු සටහන් කරන්න. ඒනයින්, $h(x)=\left(\frac{3}{2}\right)\sin 2x+2|\cos 2x|$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන h හි ප්‍රස්ථාරය $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ සඳහා කටුසටහන් කරන්න.(1998)

(51) අ) සුපුරුදු අංකනයෙන් ත්‍රිකෝණයක් සඳහා "සයින් නීතිය" ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. එම අංකනයෙන්ම

i) $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$ ii) $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$ බව සාධනය කරන්න.

ත්‍රිකෝණයක් සඳහා "කෝසයින නීතිය" අපෝහනය කරන්න.

ආ) $2\tan^{-1}(\sin x)=\tan^{-1}(2\sec x)$ විසඳන්න. (1998)

(52) අ) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{7}{17}\right)=\frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) $\cos x+\cos 3x=\sin 2x+\sin 4x$ සමීකරණ විසඳන්න.

ඇ) $\cos 3\theta\equiv\cos\theta(2\cos 2\theta-1)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,

$\alpha=\frac{2\pi}{41}$ විට,

$(2\cos 11\alpha-1)(2\cos 17\alpha-1)(2\cos 31\alpha-1)(2\cos 33\alpha-1)=1$ බව පෙන්වන්න. (1999)

53) අ) $n\in\mathbb{Z},\theta\ne n\pi$ හෝ $2n\pi-\frac{\pi}{2}$ සඳහා $\frac{1+\cos\theta+\sin\theta}{1-\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) සියලු තාත්ත්වික x සඳහා $8(\cos^6x+\sin^6x)=5+3\cos 4x$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ සඳහා $y=\cos^6x+\sin^6x$ හි ප්‍රස්තාරය දළ සටහන් කරන්න.

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ තුළ $\cos^6x+\sin^6x=k$ සමීකරණයට,

i) විසඳුම් නොමැති වීම ii) විසඳුම් දෙකක් පමණක් තිබීම

iii) විසඳුම් තුනක් පමණක් තිබීම iv) විසඳුම් හතරක් පමණක් තිබීම

සඳහා k හි අගය හෝ අගය පරාසය අපෝහනය කරන්න. (2000)

(54) ඇ) $0 \leq x \leq 2\pi$ සඳහා $4\sin^2 x + 12\sin x\cos x - \cos^2 x + 5 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

ආ) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය හා කෝසයින් නියමය ප්‍රකාශ කරන්න. $\frac{b+c}{2k-1} = \frac{c+a}{2k} = \frac{a+b}{2k+1}$ බව දී ඇත. මෙහි k යනු 2 ට වඩා වැඩි එහෙත් 4 ට සමාන නොවන දෙන ලද නිඛිලයක් ද a, b, c යනු ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන් පාද ද වේ. $\frac{\sin A}{k+1} = \frac{\sin B}{k} = \frac{\sin C}{k-1}$ බව පෙන්වන්න. k ඇසුරෙන් $\cos A$ ද ලබා ගෙන $\frac{\cos A}{(k-4)(k+1)} = \frac{\cos B}{k^2+2} = \frac{\cos C}{(k+4)(k-1)}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි A, B, C ට සුපුරුදු තේරුම් ඇත. (2000)

(55) ඇ) ඕනෑම x තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා $\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = \frac{3}{4}\sin 8x$ බව පෙන්වන්න.
$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = a$ සමීකරණ විසඳිය හැකි **a** අගයයන් අපෝහනය කරන්න.

ආ) ත්‍රිකෝණයක විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණයේ තරම මෙන් දෙගුණයක් ද දිගම පාදය කෙටිතම පාදයේ දිග මෙන් $1\frac{1}{2}$ ගුණයක් ද වේ. ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න. මධ්‍ය පාදයේ දිග 10 cm බව දී ඇත්නම් අනෙක් පාද දෙකේ දිගවල් සොයන්න. (2001)

(56) ABC යනු $b > c$ පරිදි වූ ත්‍රිකෝණයකි. D සහ E යනු A හරහා මධ්‍යස්ථය AD වන පරිදි ද AD, AE මගින් A කෝණය ත්‍රිච්ඡේද කරන පරිදි ද BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. සුදුසු ලෙස තෝරාගනු ලැබූ ත්‍රිකෝණ දෙකකට සයින් නියමය යෙදීමෙන්, $\cos\frac{A}{3} = \frac{b}{2c}$ බව සාධනය කරන්න. DE : EB = 1 : k නම් $\cos\frac{A}{3}$ රාශිය $\frac{(2+k)c}{2kb}$ ට ද සමාන බව පෙන්වන්න. k =1 නම්, $A = 90^0$ බව ද k = 2 නම්, $A = 135^0$ බව ද අපෝහනය කරන්න. එක් එක් අවස්ථාවේ දී a ඇසුරෙන් b සහ c නිර්ණය කරන්න. (2002)

(57) a) θ යනු $\frac{\pi}{2}$ හි ගුණාකාරයකට සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් විට, $x = \sin\theta - \cos\theta$ සහ $y = \tan\theta + \cot\theta$ නම්, $\sin 2\theta$
i) x ඇසුරෙන් පමණක්,
ii) y ඇසුරෙන් පමණක්, ලබාගන්න. ඒනයින්, x සහ y අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබාගන්න.

b) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = (1 + 2\cos 2x)\sin 4x$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\sin x(\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x) = \sin 3x\sin 4x$ බව පෙන්වන්න. $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

c) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය ප්‍රකාශ කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a = b + \lambda c$ වේ. මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda\cos\frac{C}{2} = \cos\left(B + \frac{C}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.
(2003)

(58) a) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ නම්, එවට $\sin\theta\tan\theta > 2(1-\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

b) $\sin(A-B)$ හා $\cos(A-B)$ හි ප්‍රසාරණ උපයෝගී කර ගනිමින්, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ හා $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ බව පෙන්වන්න. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ බව පෙන්වා $\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ බව අපෝහනය කරන්න.

c) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$ බව සාධනය කරන්න. (2004)

(59) a) i) සෑම θ සඳහාම
$8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = \cos 4\theta - \cos 3\theta$ බවත්

ii) 7θ යන්න 2π හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නම්, $\cos 4\theta = \cos 3\theta$ බවත් පෙන්වන්න. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න. O යනු $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}A = \theta$ වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණයක් තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. OBC හා OAB ත්‍රිකෝණවලට සයින් නීතිය භාවිත කරමින් සම්මත අංකනයෙන්, $OB = \frac{a\sin(C-\theta)}{\sin C} = \frac{c\sin\theta}{\sin B}$ බව සාධනය කර $\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$ බව අපෝහනය කරන්න. (2005)

(60) a) i) $\sin 3\theta = \cos 2\theta$ සමීකරණය විසඳීමෙන් $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-i}{4}$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$ සහ $\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{2}{11}$ බව පෙන්වන්න. $\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{2}{11} + 3\tan^{-1}\frac{1}{7}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර **කෝසයින නීතිය** අපෝහනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\frac{b+c}{5} = \frac{c+6}{6} = \frac{a+b}{7}$ බව දී ඇත.

i) $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{2}$ ii) $\frac{\cos A}{-1} = \frac{4\cos B}{11} = \frac{2\cos C}{7}$ බව පෙන්වන්න. (2006)

(61) a) සුපුරුදු අංකනයෙන් සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න. P යනු $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \varphi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{abc}{2}\left(\frac{BP}{bc} + \frac{CP}{ac} + \frac{AP}{ab}\right)\sin\varphi$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) i) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$, ii) $2\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right)$,

iii) $\tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right) - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න. (2007)

(62) a) සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. P යනු $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \phi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{bc}{a}(\cot\phi - \cot A) = \frac{ac}{b}(\cot\phi - \cot B) = \frac{ab}{c}(\cot\phi - \cot C)$ බව සාධනය කරන්න.

b) x, y හා z යනු $x + y + z = \pi, \cos x + \cos y = 1$ සහ $t = \sin x + \sin y$ වන පරිදි වූ සෘණ නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා තුනක් යැයි ගනිමු.

i) $\tan^{-1}(t) = \frac{x+y}{2}$, ii) $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, t එහි උපරිම අගය ගන්නා විට x,y හා z හි අගයන් සොයන්න. (2008)

(63) a) සුපුරුදු අංකනයෙන් සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. A, B සහ C ලක්ෂ්‍යය තුනක් ආරෝහණ පිළිවෙලට තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි. AB = x වන අතර D යනු C සිට h උසකින් සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. CD මගින් A සහ B හි දී පිළිවෙලින් α හා β කෝණ ආපාතනය කෙරෙයි.

i) $h = \frac{x \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\cos\theta}$,

ii) $d = \frac{x \sin(\alpha+\theta)\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි d යනු A හි මට්ටමේ සිට D හි උස වේ.

b) i) $\sin\theta - \cos\theta = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුමත්,

ii) $\tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{3} = \sin^{-1}x$ සමීකරණය සපුරාලන x හි අගයත් සොයන්න.

(2009)

(64) a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් කෝසයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

i) $2\left[\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right] = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ බව,

ii) $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ නම්, එවිට C කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

b) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$ යන්න $R\cos(\theta - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි R සහ **α** තාත්ත්වික වේ. **එනයින්**,

$\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta - \cos\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

c) $-1 \leq x \leq 1$ සඳහා $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$ බව පෙන්වන්න. (2010)

(65) ත්‍රිකෝණයක පාද P–1, P හා P+1 වෙයි. P යනු P > 1 වන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි. ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණය මෙන් දෙගුණයක් නම්, සයින් නියමය හා කෝසයින් නියමය යොදා ගනිමින් P හි අගය සොයන්න.

(2011)

(66) a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වන අයුරින් a හා b යන තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න. ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

i) $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

b) $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න. (2011)

(67) $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ යයි ගනිමින් $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. $\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right)$ හි අගය අපෝහනය කරන්න. (2012)

(68) a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න.
$a = (b - c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta - 2\tan\left[\theta - \frac{\pi}{4}\right]$ ප්‍රකාශනයට -7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

c) $5\cos^2\theta + 18\cos\theta\sin\theta + 29\sin^2\theta$ යන්න $a+b\ \cos(2\theta + \alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a හා b යනු නියත වන අතර α යනු θ වලින් ස්වායත්ත කෝණයක් වෙයි. ඒනයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5\sin x)^2 = 19$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න. (2012)

(69) $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ හා $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ නම්, $\sin 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ හා $\tan 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ බව පෙන්වන්න. (2013)

(70) $x = 2\cos\theta,\ y = \sin\theta$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු. මෙහි θ යනු පරාමිතියකි. C වක්‍රයට $\theta = \frac{\pi}{4}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයට C වකය නැවත $\theta = \alpha$ අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී හමු වේ. $2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 3\sqrt{2} = 0$ බව පෙන්වන්න. (2013)

(71) a) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma) \equiv 4\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න.

b) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. f(x) යන්න $a\sin(x + \theta) + b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $a\ (> 0)$, b හා $\theta\left[0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right]$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. $1 \le f(x) \le 5$ බව අපෝහනය කරන්න. $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

c) $P > 2q > 0$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාදවල දිග පිළිවෙලින් $p + q$, p හා $p - q$ වේ. $\sin A - 2\sin B + \sin C = 0$ බව පෙන්වා $\cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න. (2013)

(72) $\tan\alpha = -1$ හා $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ හා $\frac{\pi}{2} < \beta < 2\pi$ වේ. $\cos(\alpha + \beta)$ හි අගය සොයන්න. (2014)

(73) a) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x}$ යැයි ගනිමු. f(x) යන්න $A\cos(2x + \alpha) + B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $A\ (> 0)$, B හා $\alpha\left[0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right]$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන්න $2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $k = 2 - \sqrt{2}$ වේ.

$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න. තව ද $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න. ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $a ; b : C = 1 : \lambda : \mu$ බව දී ඇත. මෙහි λ හා μ යනු නියත වේ. $\mu^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda \sin^3 C$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(74) $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ හා $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$ යැයි ගනිමු. මෙහි α හා β සුළු කෝණ වේ. $\alpha + \beta$ හි අගය සොයන්න. (2015)

(75) a) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha\cos\beta = 1$ බව පෙන්වන්න.

b) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) + 1$ යැයි ගනිමු ; $f(x)$ යන්න $k(1 + \cos x) \quad \sin(x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\frac{f(x)}{1+\cos x} = \sqrt{2}\{g(x-1)\}$ වන ලෙස ගනිමු; මෙහි $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ වේ.

$y = g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ **ඒනයින්**, ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x) = 0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

c) සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$$a(b - c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} = (b + c)^2\tan\left(\frac{B - C}{2}\right)\sec\left(\frac{B - C}{2}\right)$$ බව පෙන්වන්න.

(2015)